

# Le théorème de Brun

Les nombres premiers jumeaux sont définis comme les nombres entiers apparaissant dans une paire de la forme  $\{p, p + 2\}$  où  $p$  et  $p + 2$  sont des nombres premiers. L'objectif de ce problème est de démontrer le joli résultat suivant, dû à Viggo Brun :

La série de inverses des nombres premiers jumeaux converge.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $\pi_2(n)$  le nombre de nombres premiers jumeaux inférieurs ou égaux à  $n$ .

## 1 Les inégalités de Bonferroni

Dans toute cette partie, on fixe un espace probabilisé d'univers  $\Omega$  fini. On fixe un entier  $p \in \mathbb{N}^*$ , et  $A_1, \dots, A_p$  des événements. Enfin, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note :

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

Et on note  $B$  l'événement :

$$B = \bigcup_{i=1}^p A_i$$

Par ailleurs, si  $C$  est un événement, on notera  $\chi_C : \Omega \rightarrow \{-1, 1\}$  l'indicatrice de cet événement.

1. Vérifier qu'on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} S_k$$

2. Soit  $\omega \in \Omega$ . On note  $N(\omega)$  le nombre d'indices  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  tels que  $\omega \in A_i$ .

a) Vérifier que pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p} \chi_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}(\omega) = \binom{N(\omega)}{k}$$

b) En déduire, pour tout  $q \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\sum_{k=1}^q (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p} \chi_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}(\omega) = \sum_{k=1}^q (-1)^{k+1} \binom{N(\omega)}{k}$$

3. a) Vérifier la formule suivante, pour tout  $q \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et tout entier  $m \geq 1$  :

$$\sum_{k=0}^q (-1)^k \binom{m}{k} = (-1)^q \binom{m-1}{q}$$

b) En utilisant 2., en déduire l'égalité suivante, pour tout  $q \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et tout  $\omega \in B$  :

$$\sum_{k=1}^q (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p} \chi_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}(\omega) \mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}(\omega) + (-1)^{q+1} \binom{N(\omega)-1}{q} \mathbb{P}(\omega)$$

c) Conclure que :

$$\sum_{k=1}^q (-1)^{k+1} S_k = \mathbb{P}(B) + (-1)^{q+1} \sum_{\omega \in B} \binom{N(\omega)-1}{q} \mathbb{P}(\omega)$$

4. Soit  $q \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Déterminer le signe de :

$$\mathbb{P}(B) - \sum_{k=1}^q (-1)^{k+1} S_k$$

Ce résultat est connu sous le nom d'inégalité de Bonferroni, et généralise l'inégalité de Boole ainsi que la formule du crible.

## 2 Une majoration probabiliste

Dans cette partie, on fixe un grand entier  $n \geq 1$ , et des entiers  $y, l \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On fait de plus l'hypothèse que  $l$  est pair.

On fixe une variable aléatoire  $X$  suivant la loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , et pour tout nombre premier  $p$ , on note  $A_p$  l'événement :  $A_p = "p \text{ divise } X \text{ ou } X + 2"$ . Enfin, on note  $\Pi$  l'événement " $X$  est un nombre premier jumeau".

5. Vérifier l'inégalité :

$$\mathbb{P}(\Pi) \leq \frac{y}{n} + 1 - \mathbb{P} \left( \bigcup_{\substack{p \leq y \\ p \text{ premier}}} A_p \right)$$

6. En utilisant les inégalités de Bonferroni, en déduire la majoration suivante, où les indices  $p_i$  sont bien entendu des nombres premiers.

$$\mathbb{P}(\Pi) \leq 1 + \frac{y}{n} + \sum_{k=1}^l (-1)^k \left( \sum_{p_1 < \dots < p_k \leq y} \mathbb{P}(A_{p_1} \cup \dots \cup A_{p_k}) \right)$$

7. On fixe dans cette question un entier  $k \geq 1$ , et  $p_1 < \dots < p_k$  des nombres premiers inférieurs ou égaux à  $y$ .

a) Soit  $j \in \mathbb{N}^*$  tel que  $p_1 \dots p_k (j+1) \leq n$ . Montrer, en utilisant par exemple le théorème chinois, l'égalité :

$$\mathbb{P}((X \in [jp_1 \dots p_k + 1 ; (j+1)p_1 \dots p_k]) \cap A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_k}) = \frac{2^k}{n}$$

b) En posant :

$$T(p_1, \dots, p_k) = \mathbb{P}(A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_k}) - \frac{2^k}{p_1 \dots p_k}$$

Obtenir l'encadrement  $-\frac{2^k}{n} \leq T(p_1, \dots, p_k) \leq \frac{2^k}{n}$ . On pourra partir de la division euclidienne de  $n$  par  $p_1 \dots p_k$ , et utiliser a).

8. a) Déduire des questions 6. et 7. la majoration :

$$\mathbb{P}(\Pi) \leq 1 + \frac{y}{n} + \sum_{k=1}^l (-1)^k \left( \sum_{p_1 < \dots < p_k \leq y} \frac{2^k}{p_1 \dots p_k} \right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^l \binom{\pi(y)}{k} 2^k$$

b) En déduire finalement :

$$\mathbb{P}(\Pi) \leq \frac{y}{n} + ey^l + \sum_{k=0}^l \left( \sum_{p_1 < \dots < p_k \leq y} \frac{2^k}{p_1 \dots p_k} \right)$$

9. a) Utiliser une inégalité de Bonferroni au rang  $l - 1$  pour obtenir :

$$\mathbb{P}(\Pi) \leq \frac{y + ey^l}{n} + \prod_{\substack{p \leq y \\ p \text{ premier}}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) + \sum_{p_1 < \dots < p_l \leq y} \frac{2^l}{p_1 \dots p_l}$$

b) En déduire :

$$\mathbb{P}(\Pi) \leq \frac{4y^l}{n} + \prod_{\substack{p \leq y \\ p \text{ premier}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 + \frac{1}{l!} \left( \sum_{\substack{p \leq y \\ p \text{ premier}}} \frac{2}{p} \right)^l$$

### 3 La conclusion

10. En partant de la formule démontrée à la partie précédente, démontrer l'existence de constantes absolues  $A, B > 0$  (indépendantes de  $n, y, l$ ) telles que, avec les notations de la partie précédente, on ait :

$$\pi_2(n) \leq 4y^l + \frac{An}{\ln(y)^2} + n \left( \frac{B \ln(\ln(y))}{l} \right)^l$$

On pourra utiliser les estimations de Mertens sur les nombres premiers :

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \ln(\ln(x)) + O(1) \quad \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = O\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)$$

11. En déduire au voisinage de  $+\infty$  l'estimation :

$$\pi_2(n) = O\left(\frac{n \ln(\ln(n))^2}{\ln(n)^2}\right)$$

On pourra choisir  $l$  de l'ordre de  $2B \ln \ln(n)$  et  $y$  de l'ordre de  $n^{\frac{1}{4B \ln(\ln(n))}}$ , en faisant l'hypothèse non restrictive  $B \geq 1$ .

12. Conclure par une sommation d'Abel la preuve du théorème de Brun.